konstant ist, woraus zu schließen ist, daß das Einzelteilchenmodell zur Beschreibung der hier untersuchten Entladungen nicht geeignet ist.

Die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Stoßwellentheorie von GUDERLY [11] sind bei den betrachteten Entladungen erfüllt: da die LORENTZ-Kraft gegenüber dem immer stärker werdenden Druckgradienten hinter der Stoßfront immer weniger ins Gewicht fällt, je weiter die Entladung nach innen gelaufen ist, kann man, abgesehen vom Entladungsbeginn, die Stoßwelle als kräftefrei ansehen, was auch durch numerische Berechnungen von KOLLER [12] bestätigt wurde. Außerdem ist den Sweep-Aufnahmen, in denen die reflektierte Stoßwelle sehr gut zu verfolgen ist, zu entnehmen, daß der Entladungsverlauf wesentlich durch die Stoßwellen bestimmt wird.

Die von WYLD aus dem Stoßwellenmodell abgeleitete Amplitudenbeziehung lautet:

$$a(t)/r(t) \propto [f_1/(-t)] + f_2 .$$

[11] G. GUDERLY, Luftfahrt-Forschung **19**, 302 [1942].
[12] A. KOLLER, Z. angew. Math. Mech., im Druck.

Der Nullpunkt der Zeitskala ist hierbei in den Pinch-Zeitpunkt gelegt. a und r bedeuten wieder Amplitude der Instabilität bzw. Radius der Entladung, und f_1 und f_2 sind zeitunabhängige Parameter. In dem unteren Diagramm der Abb. 10 ist das Verhältnis von Amplitude zu Radius gegen $(t_p - t)/t_p$ aufgetragen. Die gestrichelte Kurve wurde aus dem vorstehenden Ausdruck errechnet, wobei die Werte für f_1 und f_2 durch die beiden als schwarze Dreiecke gezeichneten Punkte festgelegt wurden. Die in Anbetracht der mehrmaligen Bildumsetzungen und der damit verbundenen Fehler gute Übereinstimmung des errechneten und gemessenen Amplitudenverlaufes läßt die Annahme zu, daß die beobachteten Instabilitäten den von WYLD aus der Stoßwellentheorie berechneten entsprechen.

Herrn Prof. H. MAECKER möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit danken. Herrn Dipl.-Math. A. KOLLER danke ich für wertvolle Hinweise und Diskussionen. Fräulein U. RINKE und Herrn K. RICKAL danke ich für ihre Hilfe bei der Durchführung und Auswertung der Messungen.

Zur Axiomatik der Diracschen γ-Operatoren im Riemannschen Raum

Von ERNST SCHMUTZER

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Jena

(Z. Naturforschg. **17 a**, 685—692 [1962]; eingegangen am 21. Mai 1962)

While usually $\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2 g^{\mu\nu}$ is considered as the fundamental relation for the definition of DIRAC's γ-operators in curved space in our axiomatic foundation this relation is a derived one being deduced from the fundamental axiom (11). Starting from this axiom in § 1 the γ-algebra in curved space is developped. In § 2 the choice of hermitean γ-operators in curved space is investigated. § 3 is occupied with the fundamental problem of splitting the γ-operators into PAULI's σ-operators, i. e. with the problem of the connexion of bispinor and spinor formalism. All computations are based on general curved coordinates fully avoiding the tedious orthogonal Vierbein-formalism.

Im Zusammenhang mit der Theorie der Elementarteilchen und der Beziehung zwischen Invarianz und Erhaltung spielt bekanntlich die Theorie der Spinoren bzw. Bispinoren im RIEMANNschen Raum (oder auch im MINKOWSKI-Raum in krummlinigen Koordinaten) eine große Rolle. Auf Einzelheiten wurde bereits in früheren Arbeiten [1] des Verfassers eingegangen, die sich mit der Theorie der Spinoren beschäftigt hatten, die man in analytischer Hinsicht als weitgehend abgeschlossen ansehen kann. Wesentlich anders ist dagegen die Situation in der Theorie der Bispinoren in beliebigen Koordinaten. Wir erwähnen dazu die in letzter Zeit erschienenen Arbeiten von FLETCHER [2], GREEN [3], NAKAMURA und TOYODA [4] sowie RODIČEV [5], die sich mit verschiedenen Aspekten der Bispinortheorie beschäftigen. Eine besonders interessante und, wie uns scheint, noch nicht tiefgründig genug geklärte Frage ist dabei diejenige, inwieweit sich nämlich tatsächlich die Theorie der Bispinoren im RIEMANNschen Raum allgemeinkovariant aufbauen läßt.

Während die Theorie der Spinoren in völlig belie-

[1] E. SCHMUTZER, Z. Naturforschg. **15 a**, 355, 831 [1960]; **16 a**, 825 [1961].
[2] J. G. FLETCHER, Nuovo Cim. **8**, 451 [1958].
[3] H. S. GREEN, Proc. Roy. Soc., Lond. **245**, 521 [1958]; Nucl. Phys. **7**, 373 [1958].
[4] H. NAKAMURA u. T. TOYODA, Nucl. Phys. **22**, 524 [1961].
[5] V. I. RODIČEV, J. Exp. Theor. Phys. **40**, 1469 [1961] (russ.).

bigen krummlinigen Koordinaten durchführbar ist, wurde bekanntlich in einer Reihe grundlegender Arbeiten über die Bispinoren vom orthogonalen Vierbein-Formalismus Gebrauch gemacht (vgl. Arbeiten von FOCK [6] und IWANENKO sowie von DIRAC [7]). Demgegenüber hat sich SCHRÖDINGER [8] bereits frühzeitig von einer speziellen Koordinatenwahl freigemacht. Ziel unserer Untersuchung ist es, im Sinne SCHRÖDINGERS beliebige krummlinige Koordinaten zugrunde zu legen und eine Reihe von Fragestellungen zu behandeln, die von SCHRÖDINGER nicht erforscht wurden. In der vorliegenden Arbeit werden wir uns vornehmlich mit der Axiomatisierung der DIRACschen γ-Operatoren, mit Hermitezitätsfragen sowie mit der Zerfällung der DIRACschen γ-Operatoren in die PAULIschen Spintensoren befassen [9].

§ 1. Axiomatik der Diracschen γ-Operatoren

Wir schließen uns im wesentlichen an unsere bereits in den früheren Arbeiten [1] benutzte Symbolik an. Wir werden also mit einer reellen Metrik der Signatur $(+, +, +, -)$ arbeiten. Die LEVI–CIVITAschen Pseudotensoren hängen dann folgendermaßen mit dem LEVI–CIVITA-Symbol zusammen (griechische Indizes laufen von $1-4$):

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{g}\, \delta^{\mu\nu\alpha\beta}; \quad \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -(1/\sqrt{g})\, \delta^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{1}$$
$$(g = -|g_{\mu\nu}|) .$$

In krummlinigen Koordinaten genügen bekanntlich die DIRAC-Operatoren der Relation

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\, g_{\mu\nu} . \tag{2}$$

Die Axiomatik der PAULIschen metrischen Spintensoren, die einer zu Gl. (2) analogen Beziehung genügen, ließ sich auf folgender Relation

$$\sigma_{\mu}{}^{\dot B}{}_{A}\, \sigma_{\nu \dot B C} = g_{\mu\nu}\, \gamma_{AC} \pm (i/2)\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\tau}\, \sigma^{\varrho}{}^{\dot B}{}_{A}\, \sigma^{\tau}{}_{\dot B C} \tag{3}$$

aufbauen [1]. Da bei der Zerfällung der DIRAC-Operatoren PAULIsche Spintensoren auftreten, also man insbesondere auch auf die Beziehung (3) stoßen müßte, liegt die Vermutung nahe, ein zu (3) analoges Axiom für die DIRAC-Operatoren anzusetzen:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\varkappa\lambda}\, \gamma_\varkappa \gamma_\lambda\, \Gamma . \tag{4}$$

Dabei ist Γ ein zunächst freier Operator, der sich aus der inneren Konsistenz des Axioms bestimmt: Geht man mit der linken Seite von (4) in die rechte Seite von (4) ein, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$-4\, \Gamma^3 = \Gamma . \tag{5}$$

Addiert man (4) bei Vertauschung der freien Indizes mit sich selbst, so ergibt sich daraus jetzt als abgeleitete Relation der Ansatz (2).

Grundsätzlich wollen wir im weiteren Indexbewegungen an den DIRAC-Operatoren im Sinne des Tensorkalküls verstanden wissen, also Beziehungen der folgenden Art

$$\gamma^\mu = g^{\mu\nu} \gamma_\nu \quad \text{usw.} \tag{6}$$

benutzen.

Multipliziert man (4) von links mit γ^μ, so ergibt sich

$$\gamma_\nu = -\tfrac{1}{3}\, \varepsilon_\nu{}^{\mu\varkappa\lambda}\, \gamma_\mu \gamma_\varkappa \gamma_\lambda\, \Gamma . \tag{7}$$

Nochmalige Multiplikation von links führt auf die Relation

$$\varepsilon^{\nu\mu\varkappa\lambda}\, \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\varkappa \gamma_\lambda\, \Gamma = -12 . \tag{8}$$

Es ist nun zweckmäßig, in Verallgemeinerung der für MINKOWSKI-Koordinaten gewählten Definition $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ zu setzen:

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!\, i}\, \varepsilon^{\nu\mu\varkappa\lambda}\, \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\varkappa \gamma_\lambda . \tag{9}$$

Damit resultiert die Gleichung

$$4!\, i\, \gamma_5\, \Gamma = -12 ,$$

aus der sich durch Multiplikationen von rechts mit Γ^2 unter Benutzung von (5)

$$\Gamma = \tfrac{1}{2}\, i\, \gamma_5 \tag{10}$$

ergibt, so daß aus (4) schließlich das in sich konsistente Axiom

$$\gamma_\lambda \gamma_\varrho = g_{\lambda\varrho} + \tfrac{1}{2}\, i\, \varepsilon_{\lambda\varrho}{}^{\sigma\tau}\, \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma_5 \tag{11}$$

folgt. Wir haben dabei γ_5 so definiert, daß

$$\gamma_5{}^2 = 1 \tag{12}$$

gilt. Man kann dieses Ergebnis so erhalten, daß man (5) von links mit γ_5 multipliziert, wodurch man bei Verwendung von (10) zur Beziehung

$$-4\, \Gamma^2 = 1 \tag{13}$$

gelangt. Wegen (10) resultiert aus (13) sofort (12).

Für manche Rechnungen ist es nützlich, die Beziehung (9) in Dreier-Schreibweise anzugeben. Zu

[6] V. FOCK, Z. Phys. **57**, 261 [1929].
[7] P. A. M. DIRAC, Max-Planck-Festschrift, Berlin 1958, S. 339.
[8] E. SCHRÖDINGER, S.B. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Klasse (1932), S. 105.
[9] In einer nachfolgenden Arbeit (E. SCHMUTZER, Z. Naturforschg. **17 a**, [1962], im Druck) werden wir beweisen, daß sich die Bispinor-Theorie allgemein-kovariant konsistent aufbauen läßt und daß die Konsistenz eine völlige Befreiung von Hermitezitätsforderungen an die γ_μ nach sich zieht.

diesem Zweck treffen wir die Festlegung, daß lateinische Indizes von 1 bis 3 laufen und die EINSTEINsche Summenkonvention angewandt wird. Führt man in diesem Sinne in (9) die Summation über den räumlichen und zeitlichen Anteil schrittweise aus, und benutzt man zur Umordnung der DIRAC-Operatoren die Relation (2), so ergibt sich

$$6\,i\,\gamma_5 = \varepsilon^{jml4}[\gamma_j\,\gamma_m\,\gamma_l\,\gamma_4 - 3\,g_{4l}\,\gamma_j\,\gamma_m]. \tag{14}$$

Hätte man (9) die äquivalente Form

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!\,i}\,\varepsilon_{\nu\mu\varkappa\lambda}\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,\gamma^\varkappa\,\gamma^\lambda \tag{15}$$

gegeben und denselben Rechnungsgang durchgeführt, so hätte sich sinngemäß

$$6\,i\,\gamma_5 = \varepsilon_{jml4}[\gamma^j\,\gamma^m\,\gamma^l\,\gamma^4 - 3\,\gamma^j\,\gamma^m\,g^{4l}] \tag{16}$$

ergeben. Führt man z. B. in Gl. (14) auch noch die räumliche Summation explizit aus, so resultiert

$$(\sqrt{g}/i)\,\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - g_{13}\,g_{24} + g_{12}\,g_{34} + g_{14}\,g_{23} - g_{12}\,\gamma_3\gamma_4 + g_{13}\,\gamma_2\gamma_4 - g_{14}\,\gamma_2\gamma_3 - g_{23}\,\gamma_1\gamma_4 + g_{24}\,\gamma_1\gamma_3 - g_{34}\,\gamma_1\gamma_2\,. \tag{17}$$

Durch Quadrieren dieses Ausdrucks kann man (12) erneut bestätigen. Bei dieser Gelegenheit benötigt man mehrere Relationen, die in MINKOWSKI-Koordinaten eine sehr einfache Form annehmen, in beliebigen Koordinaten jedoch relativ kompliziert sind. Da diese Relationen bei expliziten Diskussionen benötigt werden, geben wir sie hier an:

$$\begin{aligned}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)^2 = {}& \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4(4\,g_{23}\,g_{14} - 4\,g_{13}\,g_{24} + 4\,g_{34}\,g_{12})\\ &+ \gamma_1\gamma_4(4\,g_{13}\,g_{22}\,g_{34} + 4\,g_{12}\,g_{24}\,g_{33} - 8\,g_{34}\,g_{12}\,g_{23} - 2\,g_{14}\,g_{22}\,g_{33})\\ &+ \gamma_2\gamma_4(-2\,g_{11}\,g_{24}\,g_{33} + 4\,g_{34}\,g_{11}\,g_{23}) + \gamma_3\gamma_4(-2\,g_{34}\,g_{11}\,g_{22})\\ &+ \gamma_1\gamma_2(-2\,g_{12}\,g_{33}\,g_{44}) + \gamma_2\gamma_3\,(-2\,g_{23}\,g_{11}\,g_{44})\\ &+ \gamma_1\gamma_3(4\,g_{12}\,g_{23}\,g_{44} - 2\,g_{13}\,g_{22}\,g_{44}) + g_{11}\,g_{22}\,g_{33}\,g_{44}\,,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}(\gamma_3\gamma_4)(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4) = {}& \gamma_3\gamma_4(4\,g_{14}\,g_{23} - 4\,g_{13}\,g_{24}) + \gamma_2\gamma_4(4\,g_{13}\,g_{34} - 2\,g_{14}\,g_{33}) + \gamma_1\gamma_4(2\,g_{24}\,g_{33} - 4\,g_{23}\,g_{34})\\ &+ \gamma_2\gamma_3(-2\,g_{13}\,g_{44}) + \gamma_1\gamma_3(2\,g_{23}\,g_{44}) + \gamma_1\gamma_2(-g_{33}\,g_{44}) + 2\,g_{34}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\,,\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}(\gamma_2\gamma_4)(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4) = {}& \gamma_3\gamma_4(2\,g_{14}\,g_{22} - 4\,g_{12}\,g_{24}) + 4\,g_{12}\,g_{34}\,\gamma_2\gamma_4\\ &+ g_{22}\,g_{44}\,\gamma_1\gamma_3 - 2\,g_{12}\,g_{44}\,\gamma_2\gamma_3 - 2\,g_{34}\,g_{22}\,\gamma_1\gamma_4 + 2\,g_{24}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\,,\end{aligned} \tag{20}$$

$$(\gamma_2\gamma_3)(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4) = \gamma_3\gamma_4(2\,g_{13}\,g_{22} - 4\,g_{12}\,g_{23}) + 2\,g_{12}\,g_{33}\,\gamma_2\gamma_4 - \gamma_1\gamma_4\,g_{22}\,g_{33} + 2\,g_{23}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\,, \tag{21}$$

$$(\gamma_1\gamma_4)(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4) = 2\,g_{14}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - 2\,g_{11}\,g_{24}\gamma_3\gamma_4 + 2\,g_{11}\,g_{34}\,\gamma_2\gamma_4 - g_{11}\,g_{44}\,\gamma_2\gamma_3\,, \tag{22}$$

$$(\gamma_1\gamma_3)(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4) = 2\,g_{13}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - 2\,g_{11}\,g_{23}\,\gamma_3\gamma_4 + g_{11}\,g_{33}\,\gamma_2\gamma_4\,, \tag{23}$$

$$(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4) = 2\,g_{12}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - g_{11}\,g_{22}\,\gamma_3\gamma_4\,, \tag{24}$$

$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)(\gamma_3\gamma_4) = 2\,g_{34}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - g_{33}\,g_{44}\,\gamma_1\gamma_2\,, \tag{25}$$

$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)(\gamma_2\gamma_4) = 2\,g_{24}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - 2\,g_{23}\,g_{44}\,\gamma_1\gamma_2 + g_{22}\,g_{44}\,\gamma_1\gamma_3\,, \tag{26}$$

$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)(\gamma_2\gamma_3) = 2\,g_{23}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 + 2\,g_{34}\,g_{22}\,\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2(2\,g_{33}\,g_{24} - 4\,g_{23}\,g_{34}) - g_{22}\,g_{33}\,\gamma_1\gamma_4\,, \tag{27}$$

$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)(\gamma_1\gamma_4) = 2\,g_{14}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - 2\,g_{44}\,g_{13}\,\gamma_1\gamma_2 + 2\,g_{12}\,g_{44}\,\gamma_1\gamma_3 - g_{11}\,g_{44}\,\gamma_2\gamma_3\,, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)(\gamma_1\gamma_3) = {}& 2\,g_{13}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 + \gamma_1\gamma_2(2\,g_{14}\,g_{33} - 4\,g_{13}\,g_{34})\\ &+ 4\,g_{12}\,g_{34}\,\gamma_1\gamma_3 - 2\,g_{34}\,g_{11}\,\gamma_2\gamma_3 - 2\,g_{12}\,g_{33}\,\gamma_1\gamma_4 + g_{11}\,g_{33}\,\gamma_2\gamma_4\,,\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)(\gamma_1\gamma_2) = {}& 2\,g_{12}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 + \gamma_1\gamma_2(4\,g_{23}\,g_{14} - 4\,g_{13}\,g_{24}) + \gamma_1\gamma_4(2\,g_{22}\,g_{13} - 4\,g_{12}\,g_{23})\\ &+ \gamma_1\gamma_3(4\,g_{24}\,g_{12} - 2\,g_{14}\,g_{22}) - g_{11}\,g_{22}\,\gamma_3\gamma_4 - 2\,g_{11}\,g_{24}\,\gamma_2\gamma_3 + 2\,g_{11}\,g_{23}\,\gamma_2\gamma_4\,.\end{aligned} \tag{30}$$

Mit Hilfe von (12) resultieren nun aus dem Axiom (11) ohne Schwierigkeit die Beziehungen

$$\gamma_\nu = -\tfrac{1}{6}\,i\,\varepsilon_\nu{}^{\mu\varkappa\lambda}\,\gamma_\mu\,\gamma_\varkappa\,\gamma_\lambda\,\gamma_5\,, \qquad \gamma_\nu\,\gamma_5 = \tfrac{1}{6}\,i\,\varepsilon^{\mu\varkappa\lambda}{}_\nu\,\gamma_\mu\,\gamma_\varkappa\,\gamma_\lambda\,, \qquad (31), (32)$$

$$\mathfrak{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\,i} = ({}^{\nu}\gamma\,{}^{\mu}\gamma - {}^{\mu}\gamma\,{}^{\nu}\gamma)\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\varkappa\lambda}\,\gamma_\varkappa\,\gamma_\lambda\,\gamma_5\,. \tag{33}$$

Wendet man wiederholt die Formel (2) zur Umordnung der DIRAC-Operatoren an, so gewinnt man nach einiger Rechnung die wichtige Beziehung

$$\gamma_5 \gamma_\tau = -\gamma_\tau \gamma_5 . \tag{34}$$

Im folgenden beschäftigen wir uns mit der Herleitung von Formeln für Drei-Faktoren-Produkte und Vier-Faktoren-Produkte: Wir multiplizieren zu diesem Zweck (11) von rechts mit γ_μ und erhalten

$$\gamma_\lambda \gamma_\varrho \gamma_\mu = g_{\lambda\varrho} \gamma_\mu - \tfrac{1}{2} i \, \varepsilon_{\lambda\varrho}{}^{\sigma\delta} \gamma_\sigma \gamma_\delta \gamma_\mu \gamma_5 .$$

Auf das Produkt $\gamma_\delta \gamma_\mu$ wenden wir wiederum (11) an. Vermöge

$$\varepsilon_{\lambda\varrho}^{\gamma\delta} \varepsilon_{\delta\mu}^{\sigma\tau} = g_{\lambda\mu} g_\varrho^\sigma g^{\gamma\tau} + g_\mu^\gamma g_\lambda^\sigma g_\varrho^\tau + g_{\varrho\mu} g^{\gamma\sigma} g_\lambda^\tau - g_{\lambda\mu} g^{\gamma\sigma} g_\varrho^\tau - g_\mu^\gamma g_\varrho^\sigma g_\lambda^\tau - g_{\varrho\mu} g_\lambda^\sigma g^{\gamma\tau} \tag{35}$$

ergibt sich dann bei Verwendung von $\gamma^\tau \gamma_\varrho \gamma_\tau = \gamma^\tau (2 g_{\varrho\tau} - \gamma_\tau \gamma_\varrho) = -2 \gamma_\varrho$ (36)

die Beziehung $\gamma_\lambda \gamma_\varrho \gamma_\mu = g_{\lambda\varrho} \gamma_\mu + \tfrac{1}{2} i \, \varepsilon_{\lambda\varrho\mu}{}^\sigma \gamma_\sigma \gamma_5 + \tfrac{1}{4} \gamma_\mu (\gamma_\lambda \gamma_\varrho - \gamma_\varrho \gamma_\lambda) + \tfrac{3}{2} (\gamma_\lambda g_{\varrho\mu} - \gamma_\varrho g_{\lambda\mu})$. (37)

Mit Hilfe von (2) gewinnt man $\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\varrho = 2 g_{\mu\lambda} \gamma_\varrho - 2 g_{\mu\varrho} \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma_\varrho \gamma_\mu$ (38)

und daraus durch Antisymmetrisierung

$$\gamma_\mu (\gamma_\lambda \gamma_\varrho - \gamma_\varrho \gamma_\lambda) = 4 (g_{\mu\lambda} \gamma_\varrho - g_{\mu\varrho} \gamma_\lambda) + (\gamma_\lambda \gamma_\varrho - \gamma_\varrho \gamma_\lambda) \gamma_\mu . \tag{39}$$

Setzt man dieses Ergebnis in (37) ein, so resultiert

$$\gamma_\lambda \gamma_\varrho \gamma_\mu = g_{\lambda\varrho} \gamma_\mu + g_{\varrho\mu} \gamma_\lambda - g_{\lambda\mu} \gamma_\varrho + i \, \varepsilon_{\lambda\varrho\mu}{}^\sigma \gamma_\sigma \gamma_5 . \tag{40}$$

Ohne Schwierigkeiten deduziert man daraus die nützlichen Relationen

$$[\gamma_\lambda , \mathfrak{S}_{\varrho\mu}] = \frac{2}{i} (g_{\varrho\lambda} \gamma_\mu - g_{\lambda\mu} \gamma_\varrho) , \quad [\gamma_\mu , \mathfrak{S}_{\lambda\varrho}]_+ = 2 \, \varepsilon_{\lambda\varrho\mu}{}^\sigma \gamma_\sigma \gamma_5 , \tag{41), (42}$$

$$\gamma_\nu \mathfrak{S}_{\mu\lambda} + \mathfrak{S}_{\nu\lambda} \gamma_\mu = \frac{1}{i} (g_{\lambda\mu} \gamma_\nu - g_{\nu\lambda} \gamma_\mu) , \tag{43}$$

$$[\mathfrak{S}_{\lambda\varrho} , \mathfrak{S}_{\mu\nu}] = 2 (g_{\lambda\mu} g_{\nu\varrho} - g_{\varrho\mu} g_{\lambda\nu}) + \tfrac{1}{2} i (\varepsilon_{\lambda\varrho\mu}{}^\sigma \gamma_\sigma \gamma_\nu + \varepsilon_{\mu\nu\lambda}{}^\sigma \gamma_\sigma \gamma_\varrho + \varepsilon_{\varrho\lambda\nu}{}^\sigma \gamma_\sigma \gamma_\mu + \varepsilon_{\nu\mu\varrho}{}^\sigma \gamma_\sigma \gamma_\lambda) \gamma_5 . \tag{43'}$$

Außerdem gewinnt man aus (40) durch Multiplikation mit γ_ν von rechts unter Heranziehung von (11) die Formel

$$\gamma_\lambda \gamma_\varrho \gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\lambda\varrho} g_{\mu\nu} + g_{\varrho\mu} g_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu} g_{\varrho\nu} - i \, \varepsilon_{\lambda\varrho\mu}{}^\sigma \gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_5 + \tfrac{1}{2} i \gamma_\sigma \gamma_\delta \gamma_5 (\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\delta} g_{\lambda\varrho} + \varepsilon_{\lambda\nu}{}^{\sigma\delta} g_{\varrho\mu} - \varepsilon_{\varrho\nu}{}^{\sigma\delta} g_{\lambda\mu}) . \tag{44}$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen geben wir noch einige algebraische Beziehungen zwischen den DIRAC-Operatoren und den Basisvektoren an: Definiert man folgenden Vektor-Operator:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathfrak{e}^\mu \gamma_\mu , \tag{45}$$

so ergibt sich bei Verwendung von (2)

$$(\boldsymbol{\gamma})^2 = 4 , \tag{46}$$

$$\boldsymbol{\gamma} \gamma_\nu + \gamma_\nu \boldsymbol{\gamma} = 2 \, \mathfrak{e}_\nu , \tag{47}$$

$$\boldsymbol{\gamma} \gamma_\nu \boldsymbol{\gamma} = -2 \gamma_\nu . \tag{48}$$

§ 2. Hermitezitätsuntersuchung zu den Diracschen γ-Operatoren

Aus angeblich physikalischen Gründen setzt man bekanntlich in der konventionellen MINKOWSKI-Koordinaten $\gamma_\nu^+ = \gamma_\nu$ und in GALILEI-Koordinaten $\gamma_i^+ = \gamma_i$; $\gamma_4^+ = -\gamma_4$. Es erhebt sich nun die Frage, unter welchen Umständen eine derartige Wahl in beliebigen Koordinaten möglich ist. Wir untersuchen deshalb die Frage, ob sich der Ansatz

$$\gamma_i^+ = \gamma_i ; \qquad \gamma_4^+ = \alpha \gamma_4 \tag{49}$$

(α sei ein reeller Parameter) mit dem Axiom (11) verträgt. Beachtet man die Reellität der LEVI–CIVITA-schen Pseudotensoren, so resultiert aus (9)

$$\gamma_5^+ = -\frac{1}{4!\, i} \varepsilon^{\lambda\varkappa\mu\nu} \gamma_\lambda^+ \gamma_\varkappa^+ \gamma_\mu^+ \gamma_\nu^+ . \tag{50}$$

Da in jedem Glied der Summe einmal der Faktor γ_4^+ auftritt, so folgt

$$\gamma_5^+ = -\frac{\alpha}{4!\, i} \varepsilon^{\lambda\varkappa\mu\nu} \gamma_\lambda \gamma_\varkappa \gamma_\mu \gamma_\nu = -\alpha \gamma_5 , \tag{51}$$

während sich aus (34)

$$\gamma_\nu^+ \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\nu^+ \tag{52}$$

ergibt. Damit kann man schreiben

$$\gamma_\lambda^+ \gamma_\varrho^+ = g_{\lambda\varrho} + \tfrac{1}{2} i \alpha \, \varepsilon_{\lambda\varrho}{}^{\sigma\delta} \gamma_\sigma^+ \gamma_\delta^+ \gamma_5 . \tag{53}$$

Bei Verwendung des Ansatzes (49) findet man daraus für die räumlich-räumlichen Produkte $\alpha^2 = 1$, für die räumlich-zeitlichen Produkte $\alpha = 1$ und für das zeitlich-zeitliche Produkt $\alpha^2 = 1$. Da bei unserer gewählten Signatur $g_{44} < 0$ ist, wird also $(\gamma_4)^2$ negativ. Das ist aber nur für antihermitesche γ_4 zu befriedigen, d. h. es müßte $\alpha = -1$ sein, was im Widerspruch zu unseren Folgerungen aus dem Axiom steht. Für den Fall allgemeiner Koordinaten ist also Ansatz (49) nicht realisierbar. Eine Vermeidung dieses Widerspruchs wäre erreichbar für $g_{i4} = 0$, d. h. für zeitorthogonale Koordinatensysteme.

SCHRÖDINGER hat bewiesen, daß bei komplexer Metrik mit der Signatur $(+, +, +, +)$ der Ansatz $\gamma^{i+} = \gamma^i$; $\gamma_4^{\ +} = \gamma_4$ zu befriedigen ist. Er bediente sich dabei eines expliziten Konstruktionsverfahrens spezieller DIRAC-Operatoren. Im Sinne unserer Metrik wollen wir nun allgemein beweisen, daß der folgende Ansatz

$$\gamma^{i+} = \gamma^i; \qquad \gamma_4^{\ +} = -\gamma_4 \tag{54}$$

mit dem Axiom (11) verträglich ist.

Bei Verwendung von (6) resultiert

$$\gamma_i^{\ +} = g_{ij}\,\gamma^j + g_{i4}\,\gamma^{4+}, \tag{55}$$

$$\gamma^{4+} = g^{4j}\,\gamma_j^{\ +} - g^{44}\,\gamma_4\,. \tag{56}$$

Durch Auflösung gewinnt man daraus die Beziehungen

$$\gamma^{4+} = -(2/g_{44})\,\gamma_4 + \gamma^4, \tag{57}$$

$$\gamma_i^{\ +} = \gamma_i - (2\,g_{i4}/g_{44})\,\gamma_4\,. \tag{58}$$

Aus (15) ergibt sich durch hermitesche Konjugation

$$\gamma_5^{\ +} = -\frac{1}{4!\,i}\,\varepsilon_{\lambda\varkappa\mu\nu}\,\gamma^{\lambda+}\,\gamma^{\varkappa+}\,\gamma^{\mu+}\,\gamma^{\nu+}. \tag{59}$$

Führt man die Summation explizit aus, so erhält man bei Verwendung von (57)

$$\begin{aligned}(4!/i)\,\gamma_5^{\ +} = 4!\,i\,\gamma_5 - (8\sqrt{g}/g_{44})\,(&\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \gamma^2\gamma^3\gamma^1 \\ &+ \gamma^3\gamma^1\gamma^2 - \gamma^1\gamma^3\gamma^2 - \gamma^2\gamma^1\gamma^3 \\ &- \gamma^3\gamma^2\gamma^1)\,\gamma_4\,.\end{aligned} \tag{60}$$

Aus (40) folgt

$$\begin{aligned}&\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \gamma^2\gamma^3\gamma^1 + \gamma^3\gamma^1\gamma^2 \\ &\quad = g^{23}\gamma^1 + g^{13}\gamma^2 + g^{12}\gamma^3 + 3\,i\,\varepsilon^{123\sigma}\,\gamma_\sigma\,\gamma_5\,,\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}&\gamma^1\gamma^3\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2\gamma^1 \\ &\quad = g^{23}\gamma^1 + g^{13}\gamma^2 + g^{12}\gamma^3 + 3\,i\,\varepsilon^{12\sigma3}\,\gamma_\sigma\,\gamma_5\,,\end{aligned} \tag{62}$$

so daß

$$\gamma_5^{\ +} = \gamma_5 \tag{63}$$

resultiert. Unter diesen Umständen ergibt sich aus (11)

$$\gamma^{\varrho+}\,\gamma^{\lambda+} = g^{\varrho\lambda} - \tfrac{1}{2}\,i\,\varepsilon^{\varrho\lambda\sigma\delta}\,\gamma_\sigma^{\ +}\,\gamma_\delta^{\ +}\,\gamma_5\,. \tag{64}$$

Für das räumlich-räumliche Produkt folgt dann bei Beachtung von (54) und (58)

$$\gamma^r\,\gamma^l = g^{rl} + \tfrac{1}{2}\,i\,\varepsilon^{rl\sigma\delta}\,\gamma_\sigma\,\gamma_\delta\,\gamma_5\,, \tag{65}$$

d. h. der Ansatz (54) ist mit (11) verträglich.

Für das räumlich-zeitliche Produkt kann man bei Heranziehung von (57) und (58) schreiben:

$$\begin{aligned}\gamma^r\,\gamma^4 = g^{r4} + \frac{2\,\gamma^r\,\gamma_4}{g_{44}} - \frac{i}{2}\,\varepsilon^{r4kl}\,\gamma_k\,\gamma_l\,\gamma_5 \\ + \frac{i\,g_{k4}}{g_{44}}\,\varepsilon^{r4kl}(\gamma_4\,\gamma_l - \gamma_l\,\gamma_4)\,\gamma_5\,.\end{aligned} \tag{66}$$

Wegen

$$\gamma^r\,\gamma_4 = \tfrac{1}{2}\,i\,\varepsilon^r{}_4{}^{\mu\nu}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_5 \tag{67}$$

resultiert

$$\gamma^r\,\gamma^4 = g^{r4} + \tfrac{1}{2}\,i\,\varepsilon^{r4\mu\nu}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_5\,, \tag{68}$$

also liegt auch in diesem Fall Verträglichkeit vor.

Für das zeitlich-zeitliche Produkt kommt zu stehen:

$$\gamma^{4+}\,\gamma^{4+} = g^{44}. \tag{69}$$

Eliminiert man mit Hilfe von (57), so findet man auch in diesem Fall Konsistenz. Die Wahl (54) ist also widerspruchsfrei.

Die Betrachtung der Ansatzes (54) wirft sofort die Frage auf, ob der dazu inverse Ansatz

$$\gamma_i^{\ +} = \gamma_i; \qquad \gamma^{4+} = -\gamma^4 \tag{70}$$

ebenfalls möglich ist. In diesem Fall ergibt sich aus (6)

$$\gamma^{i+} = g^{ij}\,\gamma_j + g^{i4}\,\gamma_4^{\ +}, \tag{71}$$

$$\gamma_4^{\ +} = g_{4j}\,\gamma^{j+} - g_{44}\,\gamma^4. \tag{72}$$

Die Auflösung führt auf

$$\gamma_4^{\ +} = \gamma_4 - (2\,\gamma^4/g^{44}), \tag{73}$$

$$\gamma^{i+} = \gamma^i - (2\,\gamma^4\,g^{i4}/g^{44})\,. \tag{74}$$

Aus (9) folgt nunmehr

$$\gamma_5^{\ +} = -\frac{1}{4!\,i}\,\varepsilon^{\lambda\varkappa\mu\nu}\,\gamma_\lambda^{\ +}\,\gamma_\varkappa^{\ +}\,\gamma_\mu^{\ +}\,\gamma_\nu^{\ +}. \tag{75}$$

Die explizite Durchführung der Summation liefert, analog wie oben beschrieben,

$$\gamma_5^{\ +} = \gamma_5\,. \tag{76}$$

Aus (11) resultiert

$$\gamma_\varrho^{\ +}\,\gamma_\lambda^{\ +} = g_{\varrho\lambda} - \tfrac{1}{2}\,i\,\varepsilon_{\varrho\lambda\mu\nu}\,\gamma^{\mu+}\,\gamma^{\nu+}\,\gamma_5\,. \tag{77}$$

Nach entsprechenden Ausführungen von Summationen und Eliminationen folgert man auch in diesem Falle für das räumlich-räumliche, das räumlich-zeitliche und das zeitlich-zeitliche Produkt Konsistenz zwischen dem Ansatz (70) und dem Axiom (11). Man hat also prinzipiell die Möglichkeit, entweder die eine Wahl oder die andere zu treffen. Interessant ist nun die Frage, unter welchen Umständen beide Wahlen miteinander verträglich sind: Setzt man für die hermitesch konjugierten Operatoren die Ausdrücke (54) und (70) in die Relationen (55), (56), (71) und (72) ein, so findet man

$$\gamma_i = g_{ij}\,\gamma^j + g_{i4}\,g^{4j}\,\gamma_j - g_{i4}\,g^{44}\,\gamma_4; \quad \gamma^4 = \gamma_4/g_{44}\,. \tag{78}$$

$$\gamma^i = g^{i4}\,g_{4j}\,\gamma^j + g^{ij}\,\gamma_j - g^{i4}\,g_{44}\,\gamma^4, \quad \gamma_4 = \gamma^4/g^{44} \tag{79}$$

und daraus

$$g^{44}\,g_{44} = 1 \quad \text{bzw.} \quad g^{4j}\,g_{4j} = 0\,. \tag{80}$$

Die Verwertung dieses Ergebnisses in den Beziehungen (78) und (79) führt auf die wichtige Konsequenz

$$g_{4i} = 0\,, \tag{81}$$

d. h. beide Hermitezitätsansätze (54) und (70) sind simultan für zeitorthogonale Koordinatensysteme verträglich [10].

§ 3. Zerfällung der Diracschen γ-Operatoren in die Paulischen σ-Operatoren (metrischen Spintensoren)

Es ist ein besonders interessantes Problem, den Zusammenhang des Diracschen γ-Apparates mit dem Paulischen σ-Apparat aufzudecken, da erst dann das Verhältnis von Bispinoren zu Spinoren im Riemannschen Raum aufgeklärt werden kann. Nachdem wir in unserer früheren Arbeit [1] die axiomatische Grundlegung der Spinoren behandelt haben und wir in den vorangehenden Teilen dieser Arbeit die Axiomatik des Diracschen γ-Apparates vor uns liegen haben, sind wir jetzt in der Lage, Klarheit in das Verhältnis von Bispinoren und Spinoren im gekrümmten Raum zu bringen. Vor uns steht also die Aufgabe zu untersuchen, unter welchen Umständen sich die grundlegenden Formeln (3) und (11) zur Deckung bringen lassen. Wir gehen dabei von dem allgemeinsten Zerfällungsansatz

$$\gamma^\mu = i\begin{pmatrix} \lambda^\mu & -\sigma^\mu \\ \varrho^\mu & \varkappa^\mu \end{pmatrix} \tag{82}$$

aus. Setzen wir diesen Ausdruck in die Beziehung (2) ein, so resultieren die Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned} \sigma^\mu\,\varrho^\nu + \sigma^\nu\,\varrho^\mu - (\lambda^\mu\,\lambda^\nu + \lambda^\nu\,\lambda^\mu) &= 2\,g^{\mu\nu}\,, \\ \varrho^\mu\,\sigma^\nu + \varrho^\nu\,\sigma^\mu - (\varkappa^\mu\,\varkappa^\nu + \varkappa^\nu\,\varkappa^\mu) &= 2\,g^{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{83}$$

Um diese Relationen mit der aus (3) folgenden Formel

$$\sigma^{\mu\,A\dot{B}}\,\sigma^\nu{}_{\dot{B}C} + \sigma^{\nu\,A\dot{B}}\,\sigma^\mu{}_{\dot{B}C} = 2\,g^{\mu\nu}\,\gamma^A{}_C \tag{84}$$

zur Deckung zu bringen, muß man

$$\lambda^\mu = 0\,, \qquad \varkappa^\mu = 0 \tag{85}$$

setzen. Damit ergibt sich dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Identifizierung

$$\sigma^\mu \to \sigma^{\mu\,A\dot{B}}, \qquad \varrho^\mu \to -\sigma^\mu{}_{\dot{A}B}\,. \tag{86}$$

Zusammenfassend können wir endgültig schreiben:

$$\begin{gathered} \gamma^\mu = i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^\mu \\ \varrho^\mu & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^\mu\,\varrho^\nu + \sigma^\nu\,\varrho^\mu = 2\,g^{\mu\nu}, \qquad \varrho^\mu\,\sigma^\nu + \varrho^\nu\,\sigma^\mu = 2\,g^{\mu\nu}. \end{gathered} \tag{87}$$

Dieses Resultat ist deshalb besonders interessant, weil sich aus dem allgemeinsten Ansatz für die Zerfällung der γ-Operatoren von selbst eine Darstellung ergibt, der man wegen ihres grundlegenden Charakters den Namen „Standarddarstellung" geben sollte, im Unterschied zu dem bisherigen Sprachgebrauch, der die Pauli–Dirac-Darstellung als Standarddarstellung bezeichnet. Unsere Darstellung unterscheidet sich von letzterer in der Struktur des γ^4.

Um die entscheidende Formel (11) zerfällen zu können, ist es notwendig, erst γ_5 zu zerfällen. Setzen wir deshalb unser Ergebnis in (9) ein, so resultiert nach Ausführung der Matrizenmultiplikationen

$$4!\,i\,\gamma_5 = \varepsilon_{\nu\mu\varkappa\lambda}\begin{pmatrix} \sigma^\nu\,\varrho^\mu\,\sigma^\varkappa\,\varrho^\lambda & 0 \\ 0 & \varrho^\nu\,\sigma^\mu\,\varrho^\varkappa\,\sigma^\lambda \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu\mu\varkappa\lambda}\,\sigma^\nu\,\varrho^\mu\,\sigma^\varkappa\,\varrho^\lambda &= \pm 24\,i\,, \\ \varepsilon_{\nu\mu\varkappa\lambda}\,\varrho^\nu\,\sigma^\mu\,\varrho^\varkappa\,\sigma^\lambda &= \mp 24\,i \end{aligned} \tag{89}$$

(diese Formeln findet man im wesentlichen in unserer zitierten Arbeit über die Spinoren) ergibt sich

$$\gamma_5 = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{90}$$

Die Verwendung dieses Resultates liefert nach Zerfällung von (11) die beiden Relationen

$$\sigma^\mu\,\varrho^\nu = g^{\mu\nu} \pm \tfrac{1}{2}\,i\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\sigma_\alpha\,\varrho_\beta\,, \tag{91}$$

$$\varrho^\mu\,\sigma^\nu = g^{\mu\nu} \mp \tfrac{1}{2}\,i\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\varrho_\alpha\,\sigma_\beta\,, \tag{92}$$

die sich in Indexform wegen (86) genau mit Formel (3) decken. Damit ist das Zerlegungsproblem gelöst.

[10] In einer demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Arbeit gehen wir auf grundsätzliche Schwierigkeiten ein, die mit der Hermitezität der γ_μ verbunden sind. Wir werden zeigen, daß der Verzicht auf Hermitezität diese Komplikationen vermeiden läßt.

Wir untersuchen jetzt die Auswirkung der Hermitezitätsfestlegung (54) auf den σ-Apparat. In diesem bedeutet diese Wahl das Ergebnis

$$\sigma^i = \varrho^i, \qquad \sigma_4 = -\varrho_4, \tag{93}$$

d. h.
$$\sigma^{iA\dot{B}} = -\sigma^i{}_{AB}, \qquad \sigma_4{}^{A\dot{B}} = \sigma_{4AB}. \tag{94}$$

Ein analoges Resultat hätte man bei der Wahl (70) bekommen. Nach den Regeln der Indexbewegung für Spinoren kann man die Bedingungen (94) auch schreiben:

$$\begin{aligned} &\sigma^i{}_{\dot{A}B} + \sigma^i{}_{\dot{D}C}\gamma^{AC}\gamma^{\dot{B}\dot{D}} = 0; \\ &\sigma_{4\dot{A}B} - \sigma_{4\dot{D}C}\gamma^{AC}\gamma^{\dot{B}\dot{D}} = 0. \end{aligned} \tag{95}$$

Die explizite Auswertung von (95) führt auf die expliziten Bedingungen

$$\sigma^i{}_{1\dot{1}} = -\sigma^i{}_{2\dot{2}}; \; \sigma_{41\dot{1}} = \sigma_{42\dot{2}}; \; \sigma_{41\dot{2}} = 0; \; \sigma_{42\dot{1}} = 0 \tag{96}$$

sowie
$$\gamma = \gamma_{1\dot{2}}\gamma_{12} = 1. \tag{97}$$

Damit bekommt σ_4 die Bedeutung eines Vielfachen der Einheitsmatrix:

$$\sigma_4 = \sigma_{41\dot{1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine andere Form für die Bedingung (94) ist gegeben durch

$$\sigma^i{}_A{}^{\dot{B}} = \sigma^i{}_B{}^{\dot{A}}, \quad \sigma_{4A}{}^{\dot{B}} = -\sigma_{4B}{}^{\dot{A}}. \tag{97'}$$

Wenn die obige Hermitezitätsforderung gegenüber Transformationen erhalten bleiben soll, so resultiert aus der Invarianz von (94) gegenüber allgemeinen Transformationen das Ergebnis $(A_\mu^{\nu'} = \partial x^{\nu'}/\partial x^\mu)$:

$$A_4^{i'}(\Lambda_B^{D'}\Lambda_{\dot{E}}^{\dot{F}'} + \Lambda_{\dot{D}'}^{\dot{B}}\Lambda_{F'}^{E})\sigma_{4\dot{B}E} - (A_i^{i'}g_{44} - A_4^{i'}g_{4i})(\Lambda_B^{D'}\Lambda_{\dot{E}}^{\dot{F}'} - \Lambda_{\dot{D}'}^{\dot{B}}\Lambda_{F'}^{E})\sigma^i{}_{\dot{B}E} = 0, \tag{98}$$

$$(A_{4'}^4 g_{44} + A_{4'}^i g_{4i})(\Lambda_B^{D'}\Lambda_{\dot{E}}^{\dot{F}'} - \Lambda_{\dot{D}'}^{\dot{B}}\Lambda_{F'}^{E})\sigma_{4\dot{B}E} + A_{4'}^i(\Lambda_{\dot{D}'}^{\dot{B}}\Lambda_{F'}^{E} + \Lambda_B^{D'}\Lambda_{\dot{E}}^{\dot{F}'})\sigma^j{}_{\dot{B}E}\,(g_{4j}g_{4i} - g_{ij}g_{44}) = 0. \tag{99}$$

Die Invarianz $\gamma' = \gamma$ zieht die Bedingung

$$\Lambda^* \Lambda = 1 \tag{100}$$

nach sich ($\Lambda = |\Lambda^{A'}{}_B|$, vgl. unsere zitierte Arbeit über Spinoren).

Unter Voraussetzung der einschränkenden Bedingung (94) liegt jetzt nur noch eine einfache Art von Matrizen vor, da wir die ϱ^i, ϱ_4 durch die σ^i, σ_4 eliminieren können. Das Axiom (3) nimmt dann in Matrizenform die spezifizierte Gestalt

$$\sigma^i\sigma^j = g^{ij} \mp i\,\sigma_{41\dot{1}}\,\varepsilon^{ij}{}_\varrho{}^4\varrho^\varrho \mp i\,\varepsilon^{ij}{}_4{}^4 \tag{101}$$

für räumlich-räumliche Indizes an. Dabei haben wir zur Elimination von der durch Indexbewegungen unter Verwendung von (94) entstehenden Beziehung

$$\sigma_{kB\dot{C}} = -g_{kj}\sigma^{jB\dot{C}} + (g_{k4}/g_{44})\,[\sigma_4{}^{B\dot{C}} + g_{4j}\sigma^{jB\dot{C}}] \tag{102}$$

Gebrauch gemacht. Wir notieren außerdem, daß bei Benutzung von (93) aus (87)

$$\text{a)}\ \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2g^{ij}, \quad \text{b)}\ \sigma^i\sigma_4 = \sigma_4\sigma^i, \quad \text{c)}\ (\sigma_4)^2 = -g_{44} \tag{103}$$

resultiert.

Die bisher abgeleiteten Formeln vereinfachen sich nun für zeitorthogonale Koordinaten ($g^{i4} = 0$; $g_{i4} = 0$) entscheidend, da in diesem Fall

$$\sigma_k = g_{ik}\sigma^i; \quad \sigma^4 = g^{44}\sigma_4; \quad g_{44} = 1/g^{44} \tag{104}$$

gilt. Unter diesen Umständen entsteht dann aus (94)

$$\sigma_i^{A\dot{B}} = -\sigma_{iA\dot{B}}; \quad \sigma^{4A\dot{B}} = \sigma^4{}_{A\dot{B}}, \tag{105}$$

so daß neben (54) auch (70) Gültigkeit besitzt. Wir schreiben im folgenden die resultierenden Formeln auf:

$$\sigma^i\sigma^j = g^{ij} \mp i\,\sigma_{41\dot{1}}\,\varepsilon^{ij}{}_k{}^4\sigma^k, \tag{106}$$

$$\sigma^i\sigma^4 = \sigma^4\sigma^i, \tag{107}$$

$$\sigma^i = \mp \tfrac{1}{2} i\,\sigma_{41\dot{1}}\,\varepsilon^{ijk4}\sigma_k\sigma_j, \tag{108}$$

$$(\sigma^4)^2 = -g^{44}, \tag{109}$$

$$\sigma_{41\dot{1}} = {}_{(-)}^{+}\sqrt{-g_{44}}. \tag{110}$$

Eine noch weiter gehende Vereinfachung ergibt sich bei Zugrundelegung des MINKOWSKI-Raumes unter Benutzung von GALILEI-Koordinaten. In diesem Fall gilt:

$$g_{44} = g^{44} = -1; \quad \sigma^i = \sigma_i; \quad \sigma^4 = -\sigma_4; \quad \sigma_{41\dot{1}} = {}_{(-)}^{+}1, \tag{111}$$

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} \pm i\,\varepsilon_{ijk4}\sigma_k, \tag{112}$$

$$\sigma_i = \pm \tfrac{1}{2} i\,\varepsilon_{ijk4}\sigma_k\sigma_j, \tag{113}$$

$$(\sigma_4)^2 = (\sigma^4)^2 = 1. \tag{114}$$

Aus (112) ergeben sich sofort die zyklischen Relationen

$$\sigma_1\sigma_2 = \pm i\,\sigma_3 \qquad \text{usw.} \tag{115}$$

Damit wurde genau der Anschluß an die Axiomatik der PAULI-Matrizen erreicht.

Abschließend können wir feststellen, daß es uns damit gelungen ist, in beliebigen Koordinaten, also insbesondere ohne Benutzung des schwerfälligen orthogonalen Vierbein-Formalismus die mathematische Situation bezüglich des Zusammenhangs von Spinorkalkül und Bispinorkalkül hinsichtlich unserer Thematik aufzuklären. Außerdem ergaben sich Bedingungen, unter welchen der DIRACsche γ-Apparat in krummlinigen Koordinaten so formulierbar ist, daß gewissen Hermezitätsforderungen entsprochen werden kann. Schließlich konnte der Weg genau verfolgt werden, wie sich die Axiomatik der PAULI-Matrizen in GALILEI-Koordinaten in den großen Rahmen einfügt.

Herrn NOTTROTT danke ich für Kontrollrechnungen.

NOTIZEN

On the C—N Stretching Frequencies in para-Substituted Anilines

By PETER J. KRUEGER
Department of Chemistry, University of Alberta, Calgary, Alberta, Canada

(Z. Naturforschg. 17 a, 692—693 [1962]; eingegangen am 18. Juni 1962)

Many authors have shown that the stretching frequencies, the absorption intensities, and in some cases the band widths arising from vibrations localized in functional groups attached to an aromatic ring can be related to the electronic nature of the ring substituents through the HAMMETT substituent constants (σ) [1] based on chemical reactivity studies. Such correlations have been published for the OH stretching vibration in phenols [2], the C≡N stretching vibration in benzonitriles [3–5], the –NH stretching vibration in N-methyl anilines [6], the NH_2 stretching vibrations in anilines [5–8], and the C=O stretching vibration in benzaldehydes [9], ethyl benzoates [9] and acetophenones [9, 10]. BROWN [11] has shown that in some cases such correlations are more appropriately made in terms of the electrophilic substituent constants σ^+ [12]. The high precision and accuracy of the recent infrared measurements in this field has justified a statistical treatment of the data by RAO and VENKATARAGHAVAN [13].

Although such relations have contributed to our understanding of the structure and behaviour of organic molecules, they have remained largely empirical since completely satisfactory theoretical calculations of the substituent constants have not yet been made [14]. However, BROWN [15] has shown, on the basis of a simple molecular orbital treatment, that such correlations of spectroscopic parameters with essentially kinetic constants are reasonable, since the changes in electron distribution which occur in the molecule during vibrational distortions closely parallel those which occur in the formation of the transition state during chemical reactions.

These correlations have also been shown to hold in such cases where the vibration involves one of the aromatic ring carbon atoms, as in the asymmetrical C–O–C stretching vibration in anisoles [16]. More recently RITSCHL [17] has extended this to a simpler vibrational mode, the C–N stretching vibration in *para*-substituted anilines, where the frequency rises as the ring substituents become more electron withdrawing.

Since no interpretation was offered for this behaviour of the C–N stretching frequency, and since the NH_2 stretching vibrations in substituted anilines have been studied in great detail [18, 19], it has now been possible to justify these results in a more fundamental manner. The HNH bond angle calculated from the NH_2 stretch-

[1] L. P. HAMMETT, Physical Organic Chemistry, McGraw-Hill, New York 1940, pp. 186 ff. Also see H. H. JAFFE, Chem. Rev. **53**, 191 [1953].
[2] P. J. STONE and H. W. THOMPSON, Spectrochimica Acta **10**, 17 [1957].
[3] H. W. THOMPSON and G. STEEL, Trans. Faraday Soc. **52**, 1451 [1956].
[4] M. F. A. E. SAYED, J. Inorg. Nucl. Chem. **10**, 168 [1959].
[5] P. J. KRUEGER and H. W. THOMPSON, Proc. Roy. Soc., Lond. A **250**, 22 [1959].
[6] P. J. KRUEGER and H. W. THOMPSON, Proc. Roy. Soc., Lond. A **243**, 143 [1957].
[7] M. S. C. FLETT, Trans. Faraday Soc. **44**, 767 [1948].
[8] S. CALIFANO and R. MOCCIA, Gazz. Chim. Ital. **86**, 1014 [1956].
[9] H. W. THOMPSON, R. W. NEEDHAM and D. Jameson, Spectrochimica Acta **9**, 208 [1957].
[10] R. N. JONES, W. F. FORBES and W. A. MUELLER, Canad. J. Chem. **35**, 504 [1957].
[11] T. L. BROWN, J. Amer. Chem. Soc. **80**, 794 [1958].
[12] H. C. BROWN and Y. OKAMOTO, J. Amer. Chem. Soc. **79**, 1913 [1957]; J. Org. Chem **22**, 485 [1957].
[13] C. N. R. RAO and R. VENKATARAGHAVAN, Canad. J. Chem. **39**, 1757 [1961].
[14] G. W. WHELAND, Advanced Organic Chemistry, 3rd edition, John Wiley & Sons, New York 1960, p. 535.
[15] T. L. BROWN, J. Phys. Chem. **64**, 1798 [1960].
[16] G. K. GOLDMAN, H. LEHMAN and C. N. R. RAO, Canad. J. Chem. **38**, 171 [1960].
[17] F. RITSCHL, Z. Chem. **1**, 285 [1961].
[18] P. J. KRUEGER, D. Phil. Thesis, Oxford University 1958.
[19] P. J. KRUEGER, Comparative measurements on the fundamental and first overtone NH_2 stretching vibrations in dilute carbon tetrachloride solution for more than 60 *ortho-*, *meta-* and *para*-substituted anilines. To be published shortly.